



Estudo das Integrais de Linha com Aplicações em Física Geral

Study of Line Integrals with Applications in General Physics

Luciano Nascimento^{1*}, Anastasiia Melnyk²

^{1*}Departamento de Física-DF/CCT-UEPB, Campina Grande-PB, Brasil.

²Departamento de Educação-DE/CCHLA-UFPB, João Pessoa-PB, Brasil.

Resumo

Este artigo apresenta as principais ferramentas matemáticas na resolução de diversos problemas em nível de física matemática. Em matemática, uma integral de linha ou integral curvilínea é uma função sobre uma curva C suave e integrável. Relativamente, o ensino do cálculo de integral de linhas de curvas é diretamente influenciado por ação de campos vetoriais. Desta forma, as integrais de linhas destes campos vetoriais, de princípio conservativos ou não são bem contextualizados fisicamente do ponto de vista da Mecânica Clássica a exemplo do trabalho realizado por uma força variável de onde se obtém de forma direta o Teorema do Trabalho-Energia Cinética. O objetivo deste estudo, acerca da integral de linha é aplicação direta de seu formalismo matemático na física geral. Neste, sentido serão mostradas aplicações da integral de linha de um campo vetorial e o cálculo do trabalho no sistema PV sendo claramente um processo isotérmico, no ciclo de um motor com cilindro com combustão em nível termodinâmico. Além disso, será possível fazer algumas aplicações, utilizando o Teorema de Stokes e Gauss para obtenção das futuras Equações de Maxwell da forma integral para a forma diferencial.

Palavras-chave: Integral de Linha; Termodinâmica; Campo Vetorial; Teorema de Stokes e Gauss.

Abstract

This article presents the main mathematical tools in solving various problems in mathematical physics. In mathematics, a curvilinear line integral or integral is a function on a curve C smooth and integrable. Relatively, the calculation of the integral of curve lines is directly influenced by the action of vector fields. In this way, the line integrals of these vector fields of conservative principles are not well physically contextualized from the point of view of Classical. The purpose of this study, concerning the line integral is the direct application of its mathematical formalism in general physics. The use of line integral made it possible to obtain the Work-Kinetic Energy Theorem, as well as the work performed by piston in the PV system in an isothermal process in Thermodynamics. In addition, it will be possible to make some applications using the Stokes and Gauss Theorem to obtain the future Maxwell equations from integral to differential form.

Keywords: Integral of Line; Thermodynamics; Vector Field; Stokes and Gauss's theorem.

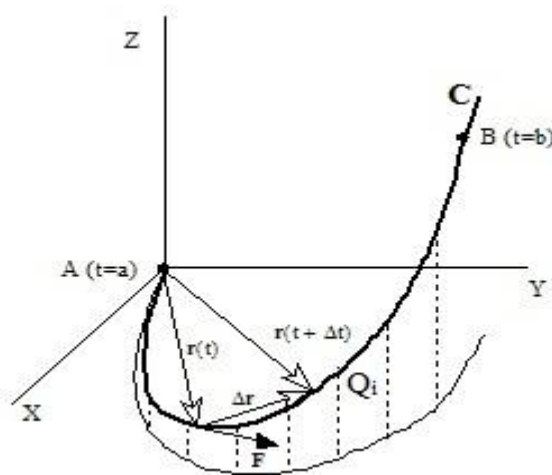
1. INTRODUÇÃO

A integral de linha de F ao longo de C , de A ($t=a$) até B ($t=b$), que denominamos de $\int_C F(x, y, z) ds$ é definida por (GONCALVES; FLEMMING, 2007),

$$\int_C F(x, y, z) ds = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n F(Q_i) \Delta r_i \right) \quad (1)$$

, quando o limite a direita existe. A representação geométrica da integral de linha ao longo da curva C é uma curva bem suave e integrável ao longo do caminho, ver figura 1 abaixo. A integral $\int_C F(x, y, z) ds$ também é denominada de integral do campo escalar de F com respeito ao comprimento de arco C .

Figura 1 - Representação geométrica da integral de linha numa curva C .



Fonte: Autor

O conceito de integral de linha é sempre associado a um campo vetorial contínuo, ou seja, definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a integral de linha de F ao longo da curva suave de C é,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (2)$$

Lembrando que:

- $\vec{F}(\vec{r}(t)) = F(x(t), y(t))$, para campos vetoriais em \mathbb{R}^2 ;

- $\vec{F}(\vec{r}(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$, para campos vetoriais em \mathbb{R}^3 .

Vamos considerar a integral de linha nas componentes x , y e z , em uma curva bem suave C , é descrito por (GUIDORIZZI, 2001):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, a \leq t \leq b \quad (3)$$

e suponha que a sua notação é

$$\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = P(x(t), y(t), z(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t), z(t))\vec{j} + R(x(t), y(t), z(t))\vec{k} \quad (4)$$

Observe que podemos escrever a integral de linha do campo vetorial \vec{F} como:

$$\int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt \quad (5)$$

o que sugere a notação,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz \quad (6)$$

1.1 A integral de linha associado ao Teorema do Trabalho-Energia Cinética

O conceito ligado a integral de linha de um campo vetorial corresponde ao trabalho realizado por uma força (força e deslocamento), somos conduzidos à definição geral:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy = \int_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

A equação (7) pode ser também escrita da seguinte forma,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left(F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \int_a^b (F \cdot \vec{v}) dt \quad (8)$$

onde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é o vetor velocidade da

partícula. Substituído a \vec{F} por

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (9)$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (10)$$

Usando agora a regra da cadeia,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (11)$$

onde a esta quantidade representa um deslocamento vetorial, substituindo este valor, obtermos o seguinte:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad (12)$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \vec{v} = m\vec{v} \frac{dv}{dx} \quad (13)$$

$$W = \int_{v_i}^v m\vec{v} \frac{dv}{dx} dx = m \int_{v_i}^v v dv = \frac{1}{2} m \Delta v \quad (14)$$

Logo, ficaremos com (NUSSENZVEIG, 2013),

$$F = W = \int_{a=v_i}^{b=v} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \frac{1}{2} mv^2 \Big|_{v_i}^v \Rightarrow W = \frac{1}{2} mv - \frac{1}{2} mv_i = K - K_i = \Delta K \quad (15)$$

Generalizando de forma direta a demonstração Teorema do Trabalho-Energia Cinética. Este trabalho tem como objetivo principal visa mostrar um minucioso estudo sobre a integral de linha aplicada ao formalismo matemático na física geral.

2. METODOLOGIA

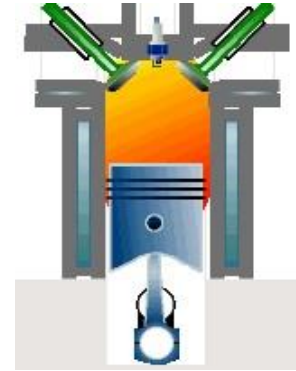
A metodologia empregada no desenvolvimento deste artigo foi a tradicional na área de pesquisa em matemática aplicada, em especial a física matemática. Ela consistiu em uma primeira etapa no estudo de artigos e livros relacionados aos temas propostos, em especial com aplicações ao Teorema do Trabalho-Energia, Cinética, problemas em termodinâmica, o Teorema de Stokes e Gauss para obtenção das futuras Equações de Maxwell da forma integral para a forma diferencial que são muito úteis na teoria eletromagnética.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 O trabalho realizado por pistão em Termodinâmica

Nesta secção, iremos explorar a aplicação da integral de linha no cálculo do trabalho realizado por um pistão em pleno processo de combustão, ilustrado na figura 2 abaixo.

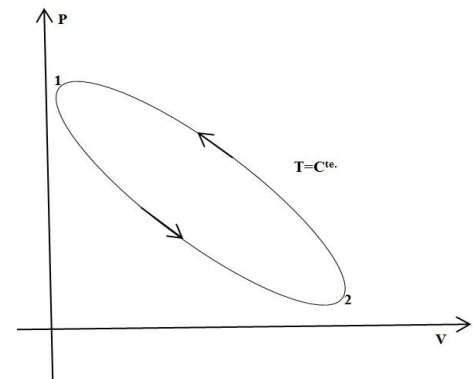
Figura 2 - Motor com um pistão com cilindro de combustão.



Fonte: <http://evoluciondelmotor123.blogspot.com/2014/10/motor-2-tiempos.html>

O gráfico da figura 3 mostra como P e V variam no sistema PV que a realiza um processo isotérmico, no ciclo de um motor de um cilindro. Sejam P(t) e V(t), respectivamente, a pressão e o volume, dentro de um cilindro no instante t, $a \leq t \leq b$ onde é o tempo necessário para um ciclo completo. A temperatura poderia expressar-se em função do volume e da pressão, tendo um caráter puramente mecânico. Mas tal não acontece.

Figura 3 - Sistema PV durante um ciclo.



Fonte: Autor

A válvula, então, se abre, a temperatura e a pressão diminuem e a energia mecânica armazenada no volante impulsiona o pistão para cima, empurrando os gases formados no interior do cilindro, devido à combustão, e fazendo com que eles sejam eliminados pela válvula, na fase da exaustão. Esta se fecha e a válvula de

entrada é aberta. Assim, o ciclo se reinicia. O trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo é:

$$W = \int_C P dV \quad (16)$$

Calculamos o trabalho realizado por um pistão para que o mesmo se mova na equação (16). Neste caso, a força que atua sobre o pistão na equação (16), onde A é a área do topo do pistão. Seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro no instante t , então o trabalho realizado pelo pistão é:

$$\vec{F}(V, P) = AP(t)\vec{i} \quad (17)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (18)$$

onde C é dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}, t \in [a, b] \quad (19)$$

Agora, vamos desenvolver a equação (17),

$$W = \int_a^b F(\vec{r}'(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \Rightarrow \quad (20)$$

$$\Rightarrow W = \int_a^b AP(t)x'(t) dt = \int_a^b P(t)Ax'(t) dt$$

O volume do cilindro no instante t é dado

por

$$V(t) = Ax(t) \quad (21)$$

Assim, podemos escrever como sendo:

$$V'(t) = Ax'(t) \quad (22)$$

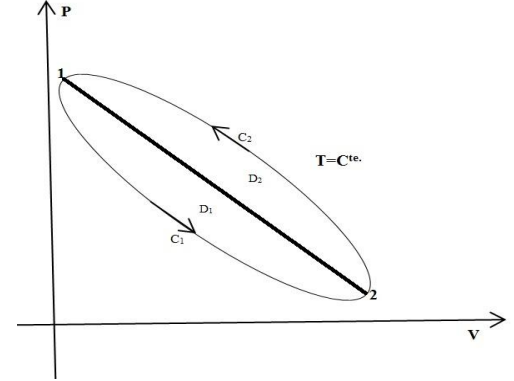
Logo, o cálculo do trabalho é (HALLIDAY et al., 2013),

$$W = \int_a^b P(t)Ax'(t) dt = \int_a^b P(t)V'(t) dt = \int_C P dV \quad (23)$$

Logo, a equação (1) é válida para o cálculo do trabalho realizado por um pistão em nível termodinâmico. Além disso, utilizando o Teorema de Green, é possível calcular o trabalho por meio da subtração das áreas das regiões D_1 e D_2 delimitadas pelas curvas C_1 e C_2 respectivamente, mostradas na figura 4, de fato: $C = C_1 \cup C_2$, então:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (24)$$

Figura 4 - Curvas indicando as áreas 1 (D_1) e 2 (D_2).



Fonte: Autor

Escrevendo agora a equação (25), e aplicando o Teorema de Green, obtemos (SWOKOWSKI, 1995):

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (25)$$

$$\vec{F} = \vec{F}(V, P) = AP\vec{i} \quad (26)$$

$$\int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial(0)}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} \right) dA = - \iint_{D_1} 1 dA = -A_{D_1} \quad (27)$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial(0)}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} \right) dA = - \iint_{D_2} 1 dA = -A_{D_2} \quad (28)$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(-A_{D_1}) + (-A_{D_2}) = A_{D_1} - A_{D_2} \quad (29)$$

3.2 Aplicações dos Teoremas de Stokes e Gauss

Os teoremas de Stokes e Gauss possuem diversas aplicações em vários campos científicos. Vamos aqui rapidamente, apresentar os principais usos que consiste na passagem da forma integral para a forma diferencial das

equações de Maxwell. A notação diferencial é muito importante para o estudo do eletromagnetismo de modo mais avançado, sendo muito utilizada neste ramo da física teórica.

- Lei de Gauss da Eletricidade

As equações de Maxwell são seguintes:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot n d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (30)$$

Assumindo que o conjunto de cargas pode ser descrito como um conjunto contínuo de cargas com densidade $\rho(\vec{r})$.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot n d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (31)$$

Usando o Teorema do Divergente ou de Gauss, teremos o seguinte (HYMAN ; SHASHKOV, 1997):

$$\oiint_S \vec{F} \cdot n d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (32)$$

Isso transforma a integral de superfície da projeção perpendicular do campo da superfície na integral de volume do divergente em:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot n d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (33)$$

A equação de Gauss para o cálculo do campo elétrico na forma diferencial fica o seguinte, a constante de permissividade do vácuo vale,

$$\epsilon_0 \cong 8,85426 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (34)$$

A lei de Gauss se refere sempre ao fluxo de cargas elétricas no interior de uma superfície gaussiana e com alto teor de simetria.

- Lei de Gauss da Eletricidade

A lei de Gauss no magnetismo estabelece que o fluxo de magnético total em qualquer superfície fechada é sempre zero, isso implicam que não há cargas

magnéticas, ou seja, monopólos magnéticos não existem. Isto tem forte aplicação em teoria das cordas cósmicas em teoria de campos em espaços curvos.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot n d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot n d\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (35)$$

- Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad (36)$$

Esta equação relaciona a força eletromotriz ϵ ou da f.e.m induzida em uma espira com a variação de taxa do fluxo magnético através nesta espira.

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (37)$$

então, utilizando o Teorema de Stokes (GARCIA,2007) :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} d\vec{s} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot n d\vec{s} \quad (38)$$

O símbolo \vec{T} denota um vetor tangente unitário a uma curva C bem suave no espaço (REITZ et al.,1982).

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot n d\vec{s} &= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot n d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot n d\vec{s} \\ \Rightarrow \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot n d\vec{s} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (39)$$

Podemos obter a equação de Maxwell a parti da Lei de Ampère na equação (39)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(\vec{i} + \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot n d\vec{S} \right) \quad (40)$$

Sabe-se que a corrente elétrica I pode ser relacionada à de densidade de corrente elétrica J pela equação:

$$\vec{i} = \iint_S \vec{J} \cdot n d\vec{S} \quad (41)$$

Lembrando que, \vec{J} é definido como a corrente vetorial que flui através de uma unidade de área da seção transversal perpendicular à direção da corrente elétrica. Finalmente, aplicando o Teorema de Stokes, obtemos que:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot nd\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot nd\vec{S} \quad (42)$$

Note que, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ é a permeabilidade magnética no vácuo. Como todas as integrais são em relacionadas a uma superfície S, seus integrandos devem ser iguais. Portanto, chegamos à dedução final da equação de Maxwell na forma diferencial, escrita da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (43)$$

Na forma diferencial, apresentamos todas as equações de Maxwell (44), são obtidas via integrais de linhas. Estas equações descrevem fenômenos em regime eletromagnéticos em baixa dimensionalidade (RAPETTI; ROUSSEAU, 2014).

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\partial_t \vec{D} + \vec{J} \\ \vec{\nabla} \times \vec{D} &= \rho(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como propósito oferecer, uma aplicação das integrais de linha em diversas áreas das ciências exatas e tecnológicas. O uso da integral de linha possibilitou a obtenção do Teorema do Trabalho-Energia Cinética, como também a realização do trabalho realizado por pistão em combustão no sistema PV em um processo isotérmico em Termodinâmica. O tratamento matemático das integrais de superfície, juntamente com os Teoremas de Stokes e Gauss para obtenção do campo elétrico associado nas Equações de Maxwell favorece a compreensão da teoria eletromagnética.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo o suporte financeiro desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

GARCIA, H.C. *Os teoremas do cálculo vetorial*. 2007. 97f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2007.

GONCALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B - Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*. 2ª Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. Vol. 1. 435p.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*, Vol. 3. Rio de Janeiro; LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 2001. 380p.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*, Vol. 2. 9ª Edição. Rio de Janeiro; LTC – Livros Técnicos e Científicos- Editora S.A. 2013, 324p.

HYMAN, J. M.; SHASHKOV, M. Natural Discretizations for the Divergence, Gradient, and Curl on Logically Rectangular Grids. *Computers & Mathematics with Applications - Journal* 33(4). p. 81-104, 1997.

LA EVOLUCIÓN DEL MOTOR. Disponível em: <http://evoluciondelmotor123.blogspot.com/2014/10/motor-2-tiempos.html>. Acesso em 18 de Março de 2019.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. 5ª Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher. 2013. 394p.

RAPETTI, F.; ROUSSEAU, G. On quasi-static models hidden in Maxwell's equations. *Applied Numerical Mathematics* 79. p.92–106, 2014.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro: Campus, 1982. 516p.

SWOKOWSKI, E. *O Cálculo com Geometria Analítica*,
Vol.2, Makron Books do Brasil Editora Uda, São Paulo.
1995, 759p.