Mens Agitat, vol. 14 (2019) 3-8. ISSN 1809-4791

Derivação dos Símbolos de Christoffel via Formalismo Lagrangeano

Derivation of the Christoffel Symbols via Lagrangean Formalism

Luciano Nascimento[1*]

[1*]*Departamento de Física-DF/CCT-UEPB,Campina Grande-PB, Brasil.*

Resumo

Neste trabalho é utilizado para descrever as equações geodésicas baseadas em derivadas covariantes são derivadas das equações de Euler-Lagrange em primeiro lugar, e como o formalismo de Euler-Lagrange é muito intuitivo, fácil de derivar sem erros, há todos os motivos para usá-los mesmo para as mais situações complicadas. No presente trabalho mostramos a aplicação das equações lagrangianas para o cenário principal para obtenção dos Símbolos de Christoffel e as demonstrações de muitas relações que servirão para resolução de problemas na relatividade geral, teoria da elasticidade, mecânica dos fluídos e eletromagnetismo. Os símbolos de Christoffel representam ótimas relações para tensor métrico, que representa uma assinatura geométrica no espaço tridimensional para uma variedade riemanniana.

Palavras-chave : Símbolos de Christoffel; Equações de Euler-Lagrange; Tensor Métrico.

Abstract

In this work it is used to describe the geodetic equations based on covariant derivatives are derived from the Euler-Lagrange equations first, and since the Euler-Lagrange formalism is very intuitive, easy to derive without errors there are all the reasons to use it, even for the most complicated situations. In the present work we show the application of the Lagrangian equations for the main scenario to obtain the Christoffel Symbols and the demonstrations of many relationships that will be used to solve problems in general relativity, elasticity theory, fluid mechanics and electromagnetism. The Christoffel symbols represent excellent relations for metric tensor, which represents a geometric signature in three-dimensional space for a Riemannian variety.

Keywords: Christoffel symbols; Euler-Lagrange equations; Metric tensor.

1. INTRODUÇÃO

Qualquer espaço que possa ser caracterizado por um intervalo do tipo:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (1)$$

,onde $g_{\alpha\beta}$ é a métrica com $\alpha, \beta = 0, 1, 2\ e\ 3$ [1].

Além disso, estamos usando a convenção de soma de

Einstein na qual somamos os índices repetidos que ocorrem como um par subscrito e sobrescrito.

Para a equação geodésica, usamos o princípio variacional que afirma que as partículas de teste de queda livre seguem um caminho entre dois pontos no espaço-tempo que termina o tempo adequado, do tipo τ. O tempo adequado é definido por,

$$d\tau^2 = -ds^2 \tag{2}$$

Então, formalmente, temos [2]:

$$d\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{-ds^2} = \int_A^B \sqrt{-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} \tag{3}$$

Para escrever isso como uma integral que podemos calcular, consideramos uma linha de curva parametrizada, $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$,onde o parâmetro σ=0 no ponto A e σ=1 no ponto B. Então, escreveremos,

$$\tau_{AB} = \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \equiv \int_0^1 L\left[\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha \right) \right] d\sigma \tag{4}$$

Aqui nós introduzimos o Lagrangiano, $L\left[\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha \right) \right]$.

Notamos também que

$$L = \frac{d\tau}{d\sigma}$$

(5)

, pode ser escrita como um a função do seguinte tipo, $f = f(\tau(\sigma))$ usando a regra da cadeia, teremos:

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{d\sigma} = L\frac{df}{d\tau}$$

(6)

Nós usaremos isso mais tarde para alterar as derivadas em relação ao nosso parâmetro arbitrário σ para derivados em relação ao tempo adequado para τ. Usando o método variacional como visto na Mecânica Clássica, obtemos as equações de Euler-Lagrange na forma,

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = 0$$

(7)

Vamos cuidadosamente calcular essas derivadas para a métrica geral. Primeiro encontramos,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = -\frac{1}{2L}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = -\frac{L}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

(8)

As σ derivadas foram convertidas em τ derivadas. Agora nós calcularemos,

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) = -\frac{1}{2L} g_{\alpha\beta}\left(\frac{dx^\beta}{d\sigma}\delta_{\alpha\gamma} + \frac{dx^\beta}{d\sigma}\delta_{\beta\gamma} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) = -\frac{1}{2L}\left(\frac{dx^\beta}{d\sigma} g_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma} + \frac{dx^\alpha}{d\sigma} g_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} \right) = \frac{1}{2L}\left(\frac{dx^\beta}{d\sigma} g_{\gamma\beta} + g_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) = -\frac{1}{L} g_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}$$

(9)

Na última etapa, usamos a simetria da métrica e o fato de que α e β são índices mudos.

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L} g_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) = L\left(g_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) = L\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) = L\left[g_{\alpha\gamma}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{dg_{\alpha\gamma}}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right] = L\left[g_{\alpha\gamma}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right] =$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\gamma}{d\sigma} \right)} \right) = L\left[g_{\alpha\gamma}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} \right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \right]$$

(10)

Novamente, usamos a simetria da métrica e a reindexação de índices repetidos. Além disso, eliminamos as aparências de L alterando as derivadas em relação ao tempo adequado. Até agora nós descobrimos que:

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^{\gamma}}{d\sigma}\right)}\right)+\frac{\partial L}{\partial x^{\gamma}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\left[g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\right]-\frac{L}{2}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\gamma}}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}=0 \tag{11}$$

Reorganizando os termos do lado direito e alterando os índices mudos α para γ, teremos [3]:

$$g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right]\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\delta}}-\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right]\frac{dx^{\delta}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}=-g_{\alpha\gamma}\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}\right)\frac{dx^{\delta}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} \tag{12}$$

Nós encontramos a equação lagrangeana

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}=-\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}\right)\frac{dx^{\delta}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} \tag{13}$$

,onde satisfazem os símbolos Christoffel, e escrevendo:

$$g_{\alpha\gamma}\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\delta}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right] \tag{14}$$

Este é um sistema linear de equações para os símbolos de Christoffel. Se a métrica é diagonal no sistema de coordenadas, então o cálculo é relativamente simples, pois há apenas um termo no lado esquerdo da Equação (14). Em geral, é necessário usar o inverso matricial de $g_{\alpha\beta}$. Além disso, você deve notar que o símbolo Christoffel é simétrico nos índices mais baixos.

$$\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}\right)=\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\right) \tag{15}$$

Podemos resolver os símbolos de Christoffel introduzindo o inverso da métrica (ou seja, o Delta de Kronecker), $g^{\gamma\mu}$ que satisfaz,

$$g^{\gamma\mu}g_{\alpha\gamma}=\delta^{\mu}_{\alpha} \tag{16}$$

Aqui, δ^{μ}_{α} $\mu\neq\alpha$ é o delta de Kronecker, que desaparece para $\mu\neq\alpha$ e é um caso contrário. Então,

$$g^{\gamma\mu}g_{\alpha\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}=\delta^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}=\Gamma^{\mu}_{\delta\beta} \tag{17}$$

Assim sendo, obtemos finalmente a expressão matemática para o símbolos de Christoffel ,

$$\Gamma^{\mu}_{\delta\beta}=\frac{1}{2}g_{\mu\gamma}\left[\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\delta}}-\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right] \tag{18}$$

Ainda podemos encontrar em de forma mais usual em outras literaturas:

$$\Gamma^{k}_{ij}=\begin{Bmatrix} & k & \\ i & & j\end{Bmatrix}=g^{km}\left[ij,k\right]=\frac{1}{2}g^{km}\left[\frac{\partial g_{im}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{im}}{\partial x^{m}}\right]$$

ou

$$\left[ij,k\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}\right];i,j,k=1,2,...,n \tag{19}$$

, que também é chamado de símbolos de Christoffel de índice 3 de primeiro tipo.

1. ALGUMAS PROPRIEDADES DOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL E SUAS PROVAS

Nesta seção, deduzimos várias propriedades e identidades envolvendo os símbolos de Christoffel, que serão úteis para o desenvimento da Teoria da Elasticidade, Teoria da Relatividade Geral e de Campos, Geometria Diferencial como também para a Mecânica dos Fluidos e do Eletromanagnetismo [4].

TEOREMA 1. Os símbolos de Christoffel [ij, k] e $\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix}$ são simétricos em relação aos índices i e j.

Prova: Usando o símbolo de Christoffel símbolos do primeiro tipo, teremos que:

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] \qquad (20)$$

Intercalando i e j, obtemos o seguinte:

$$[ji,k] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right] \qquad (21)$$

Logo,

$$[ji,k] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] = [ij,k] \qquad (22)$$

desde que $g_{ij} = g_{ji}$,isto nos revela que o símbolo de Christoffel do primeiro tipo é definido pela Eq. (19) é do tipo simétrica em relação aos índices i e j.

TEOREMA 2. Para provar isso,

$$i)[ij,m] = g_{km}\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix}$$

$$ii)[ik,j] + [jk,i] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad (23)$$

$$iii)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g^{jl}\begin{Bmatrix} i \\ l \quad k \end{Bmatrix} - g^{im}\begin{Bmatrix} j \\ m \quad k \end{Bmatrix}$$

Prova: i) Pelo símbolo de Christoffel de segundo tipo, teremos que:

$$\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = g^{kl}[ij,l] \qquad (24)$$

Multiplicando esta equação por g_{km} ,obtemos:

$$g_{km}\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = g_{km}g^{kl}[ij,l] \Rightarrow g_{km}\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = \delta^l_m[ij,l] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{km}\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = \delta^l_m[ij,l], \delta^l_m = \begin{cases} 1, l = m \\ 0, l \neq m \end{cases}$$

$$g_{km}\begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = [ij,l] \qquad (25)$$

ii) Usando a definição do símbolo de Christoffel do primeiro tipo, obtemos:

$$[ik,j] + [jk,i] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [ik,j] + [jk,i] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] =$$

$$\Rightarrow [ik,j] + [jk,i] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^j}\right], g_{ij} = g_{ji}$$

$$\Rightarrow [ik,j] + [jk,i] = \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \partial_k g_{ij} \qquad (26)$$

iii) Desde que $g^{ij}g_{lj} = \delta^i_l$,então diferenciando-o para x^k , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ij}g_{lj}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^i_l\right), \delta^i_l = \begin{cases} 1, i = l \\ 0, i \neq l \end{cases}$$

$$g^{ij}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + g_{lj}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = 0 \qquad (26)$$

Multiplicando esta equação (26) por g^{lm} ,obtemos:

$$g^{ij}g^{lm}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}+g^{lm}g_{lj}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=0$$
$$g^{lm}g_{lj}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{ij}g^{lm}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}$$
$$\delta^m_j\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{ij}g^{lm}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}$$
$$\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}=-g^{ij}g^{lm}\left\{[lk,j]+[jk,l]\right\},\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}=\left\{[lk,j]+[jk,l]\right\}$$
$$\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}=-g^{lm}\left\{g^{ij}\left(\left\{[lk,j]+[jk,l]\right\}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}=-g^{lm}\left\{\left(\left\{g^{ij}[lk,j]+g^{ij}[jk,l]\right\}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}=-g^{lm}\left\{\left(\left\{g^{ij}[lk,j]+g^{ij}[jk,l]\right\}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}=-g^{lm}\begin{Bmatrix} & i & \\ l & & j\end{Bmatrix}-g^{ij}\begin{Bmatrix} & m & \\ j & & k\end{Bmatrix}$$

(27)

Intercalando m e j, obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{lj}\begin{Bmatrix} & i & \\ l & & k\end{Bmatrix}-g^{im}\begin{Bmatrix} & j & \\ m & & k\end{Bmatrix}$$
$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{lj}\begin{Bmatrix} & i & \\ l & & k\end{Bmatrix}-g^{im}\begin{Bmatrix} & j & \\ m & & k\end{Bmatrix},g^{lj}=g^{jl}$$

(28)

Como queríamos provar finalmente.

TEOREMA 3. Para mostrar que

$$\begin{Bmatrix} & k & \\ i & & j\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\left(\sqrt{g}\right)}{\partial x^j}.$$

Prova: A forma matricial de g_{ik} é [5]:

$$g_{ik}=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & g_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn}\end{bmatrix} \qquad (30)$$

e

$$g_{ik}=\left|g_{ik}\right|=\left\|\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & g_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn}\end{matrix}\right\| \qquad (31)$$

Mas, sabemos que $g_{ik}g^{il}=\delta^l_k$,fazendo $l=k$,teremos que $g_{ik}g^{ik}=\delta^k_k=1$,assim

$$g^{ik}=[g_{ik}]^{-1}=\frac{G_{ik}}{g}\Rightarrow g=g_{ik}G_{ik} \qquad (32)$$

Derivando parcialmente g_{ik} , ficaremos com,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}=G_{ik},\frac{\partial g_{ik}}{g_{ik}}=1$$
$$\frac{\partial g}{\partial x^j}=\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=G_{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=gg^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \qquad (33)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\Rightarrow\frac{1}{g}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=g^{ik}\left\{[jk,i]+[ij,k]\right\},\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=\left\{[jk,i]+[ij,k]\right\}$$
$$\frac{1}{g}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=\left\{g^{ik}[jk,i]+g^{ik}[ij,k]\right\}$$
$$\frac{1}{g}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=\begin{Bmatrix} & k & \\ j & & k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} & i & \\ i & & j\end{Bmatrix}$$

(34)

como k é índices mudos,teremos:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \begin{Bmatrix} i \\ j \quad i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i \\ j \quad i \end{Bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = 2\begin{Bmatrix} i \\ j \quad i \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \begin{Bmatrix} i \\ j \quad i \end{Bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g\left(\log\sqrt{g}\right)}{\partial x^j} = \begin{Bmatrix} i \\ j \quad i \end{Bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} i \\ j \quad i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\partial_j \log g \tag{34}$$

Como queríamos provar finalmente.

CONCLUSÃO

Mostramos a derivação das equações de movimento através do formalismo de Euler-Lagrange para obtenção dos Símbolos de Christoffele suas relações e provas. Utilizam-se os símbolos de Christoffel sempre que cálculos práticos que implicam geometria devam ser realizados, pois permitem que cálculos muito complexos sejam realizados sem confusão. Inversamente, a notação formal, sem índices, para a conexão de Levi-Civita é elegante para estudos sevirão para resolução de problemas na relatividade geral, teoria da elasticidade, mecânica dos fluídos e eletromagnetismo.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pelo suporte financeiro concedido para esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

[1].PALACIOS, A. F. The Small Deformation Strain Tensor as a Fundamental Metric Tensor. ***Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology*** **1**. p.35-47,2015.

[2]. LEMOS, N. A.. ***Mecânica Analítica***. 1. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. v. 1. 386p .

[3]. ICHIDAYAMA,K. Property of Tensor Satisfying Binary Law. J***ournal of Modern Physics*** **8**.p. 944-963,2017.

[4]. ISLAM,N. ***Tensors & their Applications***. New Age International (P) Ltd., Publishers. p.1-262, 2006.

[5].JIANG,D.; HU,H.L. Tensor-Product Representation for Switched Linear Systems. ***Journal of Applied Mathematics and Physics*** **3**.p.322-337,2015