Mens Agitat, vol. 14 (2019) 9-14. ISSN 1809-4791

As Propriedades do Tensor de Levi-Civita

The Properties of the Levi-Civita Tensor

Luciano Nascimento[1*], Anastasiia Melnyk[2]

[1*]*Departamento de Física-DF/CCT-UEPB,Campina Grande-PB, Brasil.*

[2]*Departamento de Educação-DE/CCHLA-UFPB,João Pessoa-PB, Brasil.*

Resumo

A álgebra e o cálculo vetorial são frequentemente usados em muitos ramos da Física, por exemplo, mecânica clássica, teoria eletromagnética, Astrofísica, Espectroscopia, etc. Neste trabalho é utilizada a notação de Levi-Civita e do tensor delta de Kronecker que simplifica consideravelmente cálculos que são provadas neste artigo. Algumas das identidades foram provadas usando símbolos de Levi-Civita por outros matemáticos e físicos. Muitas das simplificações decorrem de usar a convenção da soma de Einstein sobre os índices repetidos no espaço tridimensional.

Palavras-chave: Símbolo de Levi-Civit; Delta de Kronecker; Tensor.

Abstract

Algebra and vector calculus are often used in many branches of physics, for example, classical mechanics, electromagnetic theory, astrophysics, spectroscopy, etc. In this work we use the notation of Levi-Civita and the Kronecker delta tensor that simplifies considerably calculations that are proved in this article. Some of the identities were proved using symbols of Levi-Civita by other mathematicians and physicists. Many of the simplifications stem from using the Einstein sum convention on repeated indices in three-dimensional space.

Keywords: Symbol of Levi-Civita; Kronecker's Delta; Tensor.

1. INTRODUÇÃO

O tensor Levi-Civita é um tensor totalmente antissimétrico de ordem n, sendo definido por ε_{ijk}, com $i,\ j,\ k \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Em três dimensões, o tensor Levi-Civita é definido como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & se \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ 0, & se \quad i=j, j=k, ou \quad k=i \\ -1, & se \quad (i,j,k) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \end{cases} \tag{1}$$

Os índices *i, j* e *k* são de 1, 2 e 3. Existem vinte e sete componentes do tensor de Levi-Civita, apenas seis dela são diferentes de zero. Três delas são positivas e as outras três são negativas. A troca de quaisquer dois dos índices se for permutados revertem o símbolo de Levi-Civita, podemos expressar em outra notação, usando a seguinte fórmula gera para seu cálculo,

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \prod_{j=1}^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{J\,!} \cdot \prod_{k=j+1}^{n} (i_k - i_j) \right) \qquad (2)$$

Qualquer tensor cujas componentes formam uma base ortonormal pode ser representado com a ajuda do símbolo de Levi-Civita, tal tensor é também chamado de tensor de permutação. O símbolo de Krönecker δ_{ij} (*i, j = 1,2, 3*) é denominado delta de Krönecker e definido como (SOKOLNIKOFF, 1964):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases} \qquad (3)$$

, onde δ_{ij} são os elementos da matriz da matriz identidade. O produto de dois símbolos Levi-Civita pode ser dado em termos de deltas de Krönecker. Em três dimensões, a relação é dada pelas seguintes equações (ISLAM, 2006):

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) + \qquad (4)$$
$$+\delta_{im}\left(\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{jk}\delta_{km}\right) +$$
$$+\delta_{in}\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)$$

Uma consequência importante da relação acima é dada pela equação abaixo:

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \sum_{i=1}^{3} \left(\begin{vmatrix} 1 & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \right) \Rightarrow \qquad (5)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \sum_{i=1}^{3} \left(\begin{array}{l} \left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) + \\ +\delta_{im}\left(\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{jk}\delta_{km}\right) + \\ +\delta_{in}\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \end{array} \right)$$

Como δ_{im} e δ_{in} são diferentes de zero somente para $i = m$ e $i = n$, respectivamente, o resultado da soma é:

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = 3\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) +$$
$$+\left(\delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{km}\right) + \qquad (6)$$
$$+\left(\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ki}\right) = \left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right)$$

Esta relação (5) acima é muito utilizada em cálculo vetorial. Os símbolos do delta de Krönecker e Levi-Civita podem ser usados para definir produtos escalares e vetores, respectivamente (ARFKEN & WEBER, 1999).

$$A \cdot B = \left(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\right) = \delta_{ij}A_iB_j \qquad (7)$$

$$\left|\vec{C}\right|^2 = \vec{C}\cdot\vec{C} = \delta_{ij}C_jC_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\vec{C}\right|^2 = \varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{imn}a_mb_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\vec{C}\right|^2 \left(\delta_{jm}\delta_{km} - \delta_{jn}\delta_{km}\right)a_jb_ka_mb_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\vec{C}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$$
$$\Rightarrow \left|\vec{C}\right|^2 = a^2b^2(1-\cos^2(\theta))$$
$$\Rightarrow \left|\vec{C}\right|^2 = a^2b^2sen^2(\theta) \qquad (8)$$

$$A \times B = \varepsilon_{ijk}e_iA_jB_k = -\varepsilon_{ijk}e_iA_jC_k = B \times A \qquad (9)$$

As operações do operador ∇ (del) ou laplaciano no campo escalar e vetorial são dadas por:

$$\left(\nabla\varphi\right)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \tag{10}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \delta_{ij}\frac{\partial\vec{A}_j}{\partial x_i} \tag{11}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\vec{A}_k}{\partial x_j} \tag{12}$$

2. APLICAÇÃO À MECÂNICA CLÁSSICA E AO ELETROMAGNETISMO

Na seção seguinte, tomamos exemplos de identidades vetoriais da mecânica clássica e as provamos usando as definições dos símbolos do delta de Krönecker e Levi-Civita. Essas identidades também podem ser comprovadas usando coordenadas cartesianas, mas a prova será demasiada em nível de rigor matemático (BYRON & FULLER, 1970).

2.1 Mecânica Clássica

- $$\begin{aligned}&\nabla\cdot(r^3\hat{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(r^3 x_i) = 3r^3 + \\ &+x_i\left(3r^2\frac{x_i}{r}\right) = 3r^3 + 3rx_i^2 = 3r^3 + 3r(r^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla\cdot(r^3\hat{r}) = 6r^3\end{aligned}$$

(13)

- $$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left(r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(r\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^3}\right)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(r\left(-3\frac{x_i}{r^5}\right)\right) = -3\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^4}\right) = \\ &\nabla\cdot\left(r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = -3\left(\frac{3r^4 - 4r^2x_i^2}{r^8}\right) = -3\left(\frac{3r^4 - 4r^4}{r^8}\right) = 3r^{-4}\end{aligned}$$

(14)

- $$\begin{aligned}&\nabla\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_k}{r}\right) = \varepsilon_{ijk}(x_k)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{x_j}{r}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{\left(\hat{r}\times\hat{r}\right)}{r^2} = 0\end{aligned}$$

(15)

- $$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \varepsilon_{ijk}A_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_j}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_j\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

(16)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{17}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_j\left(\frac{\partial B_m}{\partial x_l}\right) = \delta_{il}\delta_{jm}A_j\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_l}\right) - \delta_{im}\delta_{jl}A_j\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_l}\right)$$

(18)

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_j\left(\frac{\partial B_m}{\partial x_l}\right) = A_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) - A_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) = \\ &= A_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)A_i\end{aligned}$$

(19)

$$\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(A_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) + Aj\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\right) - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)A_i$$

(20)

$$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\left(A_jA_j\right)}{\partial x_i}\right)\right) - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)A_i \\ &\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{A}\end{aligned}$$

(21)

$$\left(\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k =$$

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{klm}A_l B_m\right) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_l B_m\right)$$

$$\left(\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right)_i = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\left(A_l\frac{\partial B_m}{\partial x_j} + B_m\frac{\partial A_l}{\partial x_j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right)_i = \delta_{il}\delta_{jm}A_l\frac{\partial B_m}{\partial x_j} -$$

$$+\delta_{im}\delta_{jl}A_l\frac{\partial B_m}{\partial x_j} +$$

$$+\delta_{il}\delta_{jm}B_m\frac{\partial A_m}{\partial x_j} +$$

$$-\delta_{im}\delta_{jl}B_m\frac{\partial A_l}{\partial x_j} = A_i\frac{\partial B_j}{\partial x_j} - A_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j} +$$

$$+B_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - B_j\frac{\partial A_j}{\partial x_j}$$

$$\left(\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right)_i = A_i\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) +$$

$$-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)B_i + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)B_i - B_i\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$\left(\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right) = \vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) +$$

$$-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A} - \vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

(22)

- A equação de Euler-Lagrange na forma tensorial,

- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{s}}{\partial\dot{x}^k}\right) - \frac{\partial\dot{s}}{\partial x^k} = 0 \qquad (23)$$

- onde, $\dot{s} = \sqrt{g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j}$ podemos ainda escrever as equações da seguinte forma:

$$\frac{\partial\dot{s}}{\partial\dot{x}^k} = \frac{\partial}{\partial\dot{x}^k}\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{\partial\dot{x}^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\dot{s}}{\partial\dot{x}^k} = \frac{g_{ij}}{2\dot{s}}\left(\frac{\partial\dot{x}^i}{\partial\dot{x}^k}\dot{x}^j + \dot{x}^i\frac{\partial\dot{x}^j}{\partial\dot{x}^k}\right)$$

$$= \frac{g_{ij}}{2\dot{s}}\left(\delta_k^i\dot{x}^j + \dot{x}^i\delta_k^j\right) = \frac{g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i}{2\dot{s}} = \frac{2g_{kj}\dot{x}^j}{2\dot{s}} = \frac{g_{kj}\dot{x}^j}{\dot{s}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\dot{s}}{\partial x^k} = \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

(24)

- Finalmente, obtemos:

- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kj}\dot{x}^j}{\dot{s}}\right) - \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \qquad (25)$$

2.2 Eletromagnetismo

O campo elétrico $\vec{E}$ está relacionado ao potencial elétrico φ, escrito na forma:

- $$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad (26)$$

Vamos tomar o rotacional do campo elétrico, usando a notação de Levi-Civita,

- $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi = 0 \qquad (27)$$

A indução magnética $\vec{B}$ é o rotacional do potencial vetorial $\vec{A}$. Tomando o divergente na indução magnética, (ICHIDAYAMA, 2017):

- $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 \qquad (28)$$

$$\left(\nabla\times\left(\varphi\vec{J}\right)\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi\vec{J}_k\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\left(\vec{J}_k\right) +$$

$$+\varphi\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{J}_k)$$

$$\left(\nabla\times\left(\varphi\vec{J}\right)\right) = \left(\left(\nabla\times\varphi\vec{J}\right)\right)_i +$$

$$+\varphi\left(\nabla\times\vec{J}\right)_i = \left(\nabla\varphi\right)\times\vec{J} + \varphi\left(\nabla\times\vec{J}\right)$$

(29)

A Lei de Ampère afirma que o sentido do campo magnético é determinado pelo sentido da corrente de acordo com a equação (30),

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (30)$$

Essa é uma das quatro equações de eletromagnetismo de Maxwell. No exemplo a seguir, esta equação é provada pela aplicação dos símbolos do delta de Krönecker e Levi-Civita na expressão vetorial, $\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right)$ (REITZ *et al.*,1982).

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_o} = \frac{1}{\mu_o}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_o}\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) \end{aligned} \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} &\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\vec{A})_k \Rightarrow \\ &\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}(A_m) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}(A_m) \\ &\Rightarrow \left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}(A_m) \end{aligned} \qquad (32)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \delta_{il}\delta_{jm}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m + \\ &-\delta_{im}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m \\ &\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j + \\ &-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \left(\nabla^2\vec{A}\right) \end{aligned} \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} &\left(\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} \\ &\nabla \times H = \frac{1}{\mu_o}\left[\left(\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}\right)\right] \end{aligned} \qquad (35)$$

Para a condição estática, $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ onde $\vec{A}$ potencial vetorial. Podemos escrever ainda a equação no calibre de Coulomb, o potencial magnético que obedece à equação de Poisson na seguinte forma:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_o\vec{J} \qquad (36)$$

Daí a equação (35), acima está intimamente ligada ao campo magnético gerado,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (37)$$

CONCLUSÃO

As identidades vetoriais parecem complicadas em notações de vetores padrão, utilizamos algumas provas dessas identidades vetoriais por um método alternativo (pelo uso de símbolos de Krönecker e Levi-Civita). Ao todo, discutimos treze exemplos de identidades vetoriais da mecânica e do eletromagnetismo. A principal motivação do uso dos símbolos do delta de Krönecker e Levi-Civita é totalmente indispensável para cálculos, onde a soma é tomada sobre índices repetidos, principalmente para cálculos de campos vetoriais com operações em que tomam rotacional do rotacional, rotacional de produtos vetoriais, divergente de produto vetorial que aparecem em Eletromagnetismo ou na Mecânica Clássica nas formulações Lagrangeana e Hamiltoniana. As provas apresentadas neste artigo são um novo sabor para ensinar vetores a estudantes de física, matemática e engenharia.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo o suporte financeiro desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. ***Mathematical Methods for Physicists***. New York: Academic Press. p.40-199, 1999.

BYRON, F. W.; FULLER, R. W. ***Mathematics of Classical and Quantum Physics*****.** New York: Dover Publications, Inc. p. 5, 82, 1970.

ISLAM, N. ***Tensors and Their Applications***. Publisher: New Age International Pvt Ltd. Ansari Road, Daryaganj and New Delhi, Inc. p. 1-5, 2006.

ICHIDAYAMA, K. Introduction of the Tensor Which Satisfied Binary Law. ***Journal of Modern Physics (8)***. p 126-132, 2017.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J. CHRISTY, R. W. ***Fundamentos da Teoria Eletromagnética***. Rio de Janeiro: Elsevier, p. 296- 300, 1982.

SOKOLNIKOFF, I.S. ***Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua***. 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc.: New York, London, Sydney, p.1-101, 1964.